

文章编号:1672-6952(2015)03-0073-03

## 贝叶斯定理在风险型决策中的应用

于惠川, 尼加提·帕尔哈提

(辽宁石油化工大学经济管理学院, 辽宁抚顺 113001)

**摘要:** 阐述了风险型决策的4个特性、贝叶斯定理公式的基本模型及其对解决风险型决策问题的重要意义。重点列举两个典型案例,生动具体地说明了贝叶斯定理在风险型决策中的应用过程以及产生的良好效应,同时对决策树方法进行了规范并进行了详细的讲解。

**关键词:** 贝叶斯定理; 风险型决策; 先验概率; 后验概率; 期望值

**中图分类号:** F202

**文献标志码:** A

doi:10.3696/j.issn.1672-6952.2015.03.018

### Bayes Theorem's Application in Risk Decision

Yu Huichuan, Nijaiti Paerhati

(School of Economics & Management, Liaoning Shihua University, Fushun Liaoning 113001, China)

**Abstract:** The four properties and the fundamental model of Bayes's formula and the importance of solving problems were stated in risk decision. Two typical cases were enumerated, and they illustrated the effectiveness and good results of Bayes theorem in the application process; the drawing and operation process of decision tree method were explained in detail.

**Keywords:** Bayes theorem; Risk type decision; Prior probability; Posterior probability; Expected value

## 1 风险型决策

风险型决策亦称随机型决策,具有如下特征:

(1)决策目标的明确性。追求收益最大化或损失最小化。

(2)方案选择的可控性。在若干个备选方案中,如何选、选择哪个,完全由决策者决定。

(3)自然状态的随机性。选择任何一个方案都会遇到一个以上的自然状态,并产生与之相应的后果。但是,各种状态的出现是决策者不可控的。

(4)先验概率的可知性。根据历史资料和经验积累,决策者可以主观估计各种状态出现的概率分布,这种主观概率也叫先验概率。它是计算每个方案在各种自然状态下的期望值的权数,对方案的选择至关重要。

以上4个特征性质同时具备者,就是典型的风险型决策。之所以叫风险型,是因为概率是对大量重复事件的统计结果,依此计算的期望值实质是对同类决策问题大量重复进行的前提下的加权平均值,在一次决策过程中其可靠性是有限的,所以不论决策者选择哪个方案都要承担一定的风险,这是风

险型决策的本质属性。

## 2 贝叶斯定理

贝叶斯定理(Bayes Theorem)又称贝叶斯基本原理,是贝叶斯决策理论的根基。贝叶斯基本原理是概率论的一个结果,它与随机变量的条件概率以及边际概率分布有关,在有关概率的解说中,贝叶斯定理能告诉我们如何利用新信息修改已有的先验概率,进而形成更为客观的后验概率。作为一个规范的原理,贝叶斯定理对所有的概率的解释是有效的。

(1)条件概率。设  $A, B$  为两个事件,若  $P(B) > 0$ , 则称  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  为“在事件  $B$  发生下事件  $A$  发生的条件概率”,简称条件概率。

(2)乘法公式。若  $P(B) > 0$ , 则  $P(AB) = P(B)P(A|B)$ 。

(3)全概率公式。设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  互不相容, 且  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , 如果  $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则对任一事件  $A$ , 有:  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ 。

收稿日期:2014-05-04

修回日期:2014-06-09

作者简介:于惠川(1956-),男,教授,从事企业管理等方面的研究;E-mail:yhc9839@sina.com。

(4) 贝叶斯定理公式。设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  互不相容, 且  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , 如果  $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, 2, \dots, n$ 。

在贝叶斯定理中, 诸  $P(B_i)$  称为  $B_i$  的先验概率, 而诸  $P(B_i | A)$  称为  $B_i$  的后验概率, 它表示在“事件 A 发生”这个新信息后, 对  $B_i$  的概率作出的修正。

贝叶斯定理对解决风险型决策问题的重要意义在于: 它巧妙地将先验概率与后验概率结合起来, 并根据具体情况不断地使用, 使决策逐步完善和更加科学。

### 3 贝叶斯定理的应用案例

#### 3.1 案例 1

某钻探公司在某地区进行石油勘探, 凭经验主观估计该地区有油的概率为 0.50, 无油的概率为 0.50。如果对该地区做地震试验, 则可获得进一步的有用信息。根据历史积累的试验资料得知: 凡有油地区试验结果好的概率为 0.90, 试验结果不好的概率为 0.10; 凡无油地区试验结果好的概率为 0.20, 试验结果不好的概率为 0.80。做地震试验所需的费用为 10 万元。进行钻探可能遇到两种情况: 若有油, 则将获得 100 万元的收益; 若无油, 则将损失 100 万元的费用。问应如何决策?

解: 设  $\theta_1$  = 有油,  $\theta_2$  = 无油,  $A_1$  = 试验结果好,  $B_1$  = 试验结果不好。由题意可知  $P(\theta_1) = 0.50$ ,  $P(\theta_2) = 0.50$ , 这是先验概率;

$P(A_1 | \theta_1) = 0.90$ ,  $P(B_1 | \theta_1) = 0.10$ ,  $P(A_1 | \theta_2) = 0.20$ ,  $P(B_1 | \theta_2) = 0.80$ , 这是条件概率。

利用全概率公式, 计算做地震试验结果好与不好的全概率(亦称边际概率与无条件概率)。

试验结果好的全概率:

$$P(A_1) = P(\theta_1)P(A_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(A_1 | \theta_2) = 0.50 \times 0.90 + 0.50 \times 0.20 = 0.55$$

试验结果不好的全概率:

$$P(B_1) = P(\theta_1)P(B_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(B_1 | \theta_2) = 0.50 \times 0.10 + 0.50 \times 0.80 = 0.45$$

应用贝叶斯公式计算各事件的后验概率。

在试验结果好的条件下, 有油的概率为:

$$P(\theta_1 | A_1) = \frac{P(\theta_1)P(A_1 | \theta_1)}{P(\theta_1)P(A_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(A_1 | \theta_2)} = \frac{0.50 \times 0.90}{0.50 \times 0.90 + 0.50 \times 0.20} = 0.82$$

在试验结果好的条件下, 无油的概率为:

$$P(\theta_2 | A_1) = \frac{P(\theta_2)P(A_1 | \theta_2)}{P(\theta_1)P(A_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(A_1 | \theta_2)} = \frac{0.50 \times 0.20}{0.50 \times 0.90 + 0.50 \times 0.20} = 0.18$$

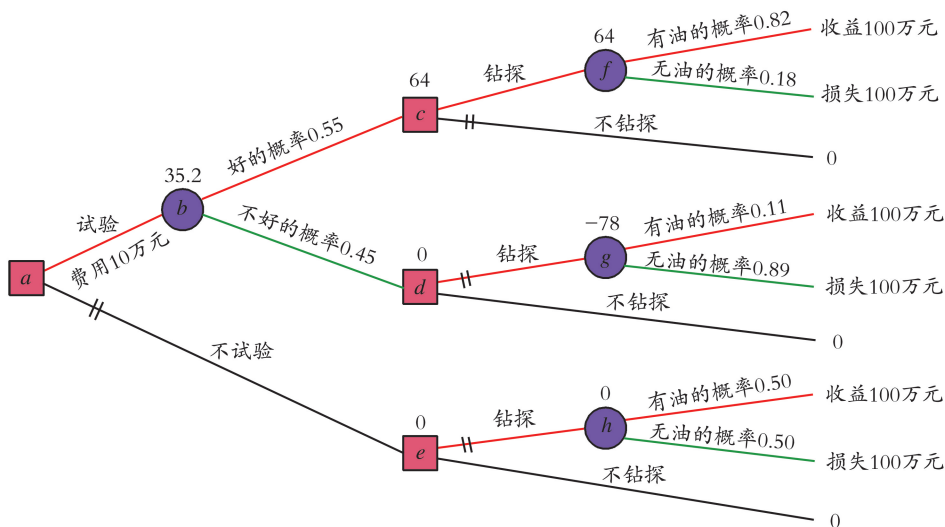
在试验结果不好的条件下, 有油的概率为:

$$P(\theta_1 | B_1) = \frac{P(\theta_1)P(B_1 | \theta_1)}{P(\theta_1)P(B_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(B_1 | \theta_2)} = \frac{0.50 \times 0.10}{0.50 \times 0.10 + 0.50 \times 0.80} = 0.11$$

在试验结果不好的条件下, 无油的概率为:

$$P(\theta_2 | B_1) = \frac{P(\theta_2)P(B_1 | \theta_2)}{P(\theta_1)P(B_1 | \theta_1) + P(\theta_2)P(B_1 | \theta_2)} = \frac{0.50 \times 0.80}{0.50 \times 0.10 + 0.50 \times 0.80} = 0.89$$

根据上述计算结果绘制决策树, 如图 1 所示。



注: 1. “○”中的符号  $f, g, h, b$  表示各状态结点; 2. “□”中的符号  $c, d, e, a$  表示各决策结点;

3. “○”上面的数值表示各状态结点的期望值  $E_i$ ; 4. “□”上面的数值表示各决策结点的期望值  $E_j$ 。

图 1 案例 1 的决策树

用决策树法进行决策的原理是,以各方案期望值的大小为决策准则。具体步骤为:先正向(左→右)画树形结构,并标明各种状态发生的概率及各状态下的损益值;再逆向(右→左)计算各方案的期望值,并加以比较;最后,选择期望值最大的方案为最优方案,并对淘汰的方案进行“剪枝”,用符号“||”表示。图1中各状态结点(符号“○”)的期望值 $E_i$ 计算如下; $E_i$ 中的 $i$ 表示各状态结点, $i=f, g, h, b$ 。

$$E_f = 0.82 \times 100 + 0.18 \times (-100) = 64.0$$

$$E_g = 0.11 \times 100 + 0.89 \times (-100) = -78.0$$

$$E_h = 0.5 \times 100 + 0.5 \times (-100) = 0$$

$$E_b = 0.55 \times 64 + 0.45 \times 0 = 35.2$$

图1中各决策结点(符号“□”)的期望值 $E_j$ 是比较方案后取舍的结果, $E_j$ 中的 $j$ 表示各决策结点, $j=c, d, e, a$ 。

$$E_c = \max\{64.0, 0\} = 64.0$$

$$E_d = \max\{-78.0, 0\} = 0$$

$$E_e = \max\{0, 0\} = 0$$

$$E_a = \max\{(35.2 - 10.0), 0\} = 25.2$$

决策结果:先做地震试验,若试验结果为好则进行钻探;若试验结果为不好则不钻探。通过本案例可以看出贝叶斯原理的重要作用:在原有信息(主观上的先验概率)基础上,通过地震试验获取新的信息(综合主客观因素的后验概率),从而进一步提高决策的科学性。

### 3.2 案例2

某企业决策层拟增加投资改进设备以提高产品优质率,预计改进全部设备需投资90万元。基层认为改进设备后优质品率可提升到90%,管理层认为可提升到70%。根据经验,决策层认为前者的可信度为40%,后者的可信度为60%。据测算,如果优质品率提升到90%,则可增加收益20万元/a;若优质品率提升到70%,则可增加收益10万元/a。改进后的设备至少可以有效运转6a。为慎重起见,决策层先试验性地改进一套设备试制了5个产品,结果全是优质产品。问应如何决策?

解:设 $\theta_3$ =优质品率为90%, $\theta_4$ =优质品率为70%, $A_2$ =优质品。由题意可知 $P(\theta_3)=0.40$ ,

$P(\theta_4)=0.60$ ,这是决策层根据经验对两种意见的看法,属于先验概率。条件概率 $P(A_2|\theta_3)$ , $P(A_2|\theta_4)$ 可利用二项分布公式 $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ , $k=1,2,\dots,n$ 分别求出:

$$P(A_2|\theta_3)=0.90^5=0.590, P(A_2|\theta_4)=0.70^5=0.168$$

应用贝叶斯公式计算 $\theta_3$ 和 $\theta_4$ 的后验概率为:

$$\begin{aligned} P(\theta_3|A_2) &= \frac{P(\theta_3)P(A_2|\theta_3)}{P(\theta_3)P(A_2|\theta_3)+P(\theta_4)P(A_2|\theta_4)} \\ &= \frac{0.40 \times 0.590}{0.40 \times 0.590 + 0.60 \times 0.168} = 0.70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\theta_4|A_2) &= \frac{P(\theta_4)P(A_2|\theta_4)}{P(\theta_3)P(A_2|\theta_3)+P(\theta_4)P(A_2|\theta_4)} \\ &= \frac{0.60 \times 0.168}{0.40 \times 0.590 + 0.60 \times 0.168} = 0.30 \end{aligned}$$

显然,试验后决策层对两种意见的可信度变为0.70和0.30。现在分别以先验概率和后验概率计算期望收益值,并用期望值法进行决策。

试验前的期望收益值为:

$$E_{\text{验前}} = (0.40 \times 20 + 0.60 \times 10) \times 6 = 84.0$$

试验后的期望收益值为:

$$E_{\text{验后}} = (0.70 \times 20 + 0.30 \times 10) \times 6 = 102.0$$

显然 $E_{\text{验后}} > 90.0 > E_{\text{验前}}$ ,即以先验概率计算的期望收益值小于投资额,结论是不可投资;以后验概率计算的期望收益值大于投资额,表明投资是可行的。这正是贝叶斯原理充分运用“新信息”(后验概率)进行决策的意义所在,这将大大提高决策层的投资信心。经进一步的分析,企业通过投资将全部设备改进后,随着优质品率的提升,在直接增加经济效益的同时也提升了企业的信誉和社会形象,并对环境保护、社会效益等也产生了良好的效应。

## 4 结 论

风险型决策并非纯数学问题,贝叶斯定理应用于风险型决策确能提高决策的科学性,降低风险度,却不能完全摆脱和化解风险,这是风险型决策的本质所决定的,所以决策者必须时刻秉持承担风险的勇气。

## 参 考 文 献

- [1] 罗党,王淑英.决策理论与方法[M].北京:机械工业出版社,2011:59-73.
- [2] 运筹学教材编写组.运筹学[M].3版.北京:清华大学出版社,2005:425-427,430-433.
- [3] 约翰·鲍威尔.定量决策分析[M].上海:上海远东出版社,2004:126-127,266-268.
- [4] 吴清烈,蒋尚华.预测与决策分析[M].南京:东南大学出版社,2004:187-191.

(下转第80页)

- [5] Berger A N, Hasan I, Klapper L E. Further evidence on the link between finance and growth: An international analysis of community banking and economic performance[J]. Journal of Financial Services Research, 2004, 25: 169-202.
- [6] Berger A, Klapper L F, Peria M, et al. Bank ownership type and banking relationships [J]. Journal of Financial Intermediation, 2008, 17: 37-62.
- [7] Mian A. Distance constraints: The limits of foreign lending in poor economies[J]. Journal of Finance, 2006, 61(3): 1465-1505.
- [8] Detragiache E, Tresselt T, Gupta P. Foreign banks in poor countries: Theory and evidence[J]. Journal of Finance, 2008, 63(5): 2123-2160.
- [9] Clarke, George, Cull, et al. Soledad martinez peria, and Susana M. Sanchez, Bank lending to small businesses in latin America: Does bank origin matter? [J]. Journal of Money, Credit, and Banking, 2005, 37(1): 83-118.
- [10] 徐振东. 外资银行在中国: 业务竞争状况及其发展趋势[J]. 中国金融, 2003(8): 22-26.
- [11] 叶欣, 冯宪宗. 外资银行进入对本国银行体系稳定性影响的实证研究[J]. 经济科学, 2003(2): 50-56.
- [12] 黄宪, 熊福平. 外资银行在中国发展的经营动机和经营策略分析[J]. 金融研究, 2005(2): 82-93.
- [13] 田素华, 徐明东. 外资银行进入对中国不同类型企业资源获取影响差异的经验证据[J]. 世界经济研究, 2010(12): 30-36.

(编辑 宋锦玉)

(上接第 72 页)

- [3] 刘殿兰, 张长生. 率先实现城乡居民人均收入与 GDP 同步翻番的若干思考[J]. 广东行政学院学报, 2013, 25(4): 82-86.
- [4] 高帆. 中国各省份经济增长的因素分解与劳动结构效应: 1978~2007 年[J]. 数量经济技术经济研究, 2010(7): 21-37.
- [5] 张自然. TFP 增长对中国城市经济增长与波动的影响——基于 264 个地级及地级以上城市数据[J]. 金融评论, 2014(1): 24-37.
- [6] 辽宁省统计局. 辽宁统计年鉴(2013)[M]. 北京: 中国统计出版社, 2013: 25-150.
- [7] 刘金全, 刘志刚. 我国 GDP 增长率序列中趋势成分和周期成分的分解[J]. 数量经济技术经济研究, 2004(5): 94-99.
- [8] 易丹辉. 数据分析与 EViews 应用[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2009: 38-51.
- [9] 闫超, 金晓彤. 我国财政政策与宏观经济的关联性研究[J]. 经济问题探索, 2014(12): 1-6.
- [10] 国务院办公厅. 关于深化收入分配制度改革的若干意见[EB/OL]. (2013-02-05)[2014-11-11]. [http://www.gov.cn/jzwgk/2013-02/05/content\\_2327531.htm](http://www.gov.cn/jzwgk/2013-02/05/content_2327531.htm).

(编辑 宋锦玉)

(上接第 75 页)

- [5] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程习题与解答[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 36-93, 357-360.
- [6] 张俊光, 徐振超. 基于贝叶斯风险决策理论的研发项目风险评估方法[J]. 工业技术经济, 2012(12): 66-70.
- [7] 任晓明, 李章吕. 贝叶斯决策理论的发展概况和研究动态[J]. 科学技术哲学研究, 2013, 30(2): 1-7.
- [8] 郭迎春. 基于贝叶斯风险决策的创新风险管理研究[J]. 科技管理研究, 2012(15): 242-246.
- [9] 朱喜安, 陈巧玉. 我国贝叶斯研究进展的计量分析[J]. 统计与决策, 2012(13): 35-38.
- [10] 李章吕. 贝叶斯决策理论研究[D]. 天津: 南开大学, 2012.
- [11] 李昊, 谢中江, 侯哲生. 基于贝叶斯决策的网格计算资源分配算法[J]. 吉林化工学院学报, 2013, 30(7): 72-74.
- [12] 马蕾, 杨善志, 冯俊文. 决策树研究新探[J]. 南京理工大学学报, 2001, 25(5): 449-452.
- [13] 赵长龙. 基于贝叶斯理论的房地产投资决策研究[D]. 长春: 长春工业大学, 2012.

(编辑 宋锦玉)